福井県立大学論集　第29号　2007.7

［研究ノート］

2項係数を含む有限和に関する命題（2）

田　中　武　之

金属材料の疲労き裂発生を表す確率過程モデルとして、損傷累積モデル[1)]が提案されている。このモデルによって、疲労き裂発生までの平均寿命を表す式が導かれる。当初、その式に現れる函数$F_l(x)$が繁雑な形をしていたため、近似的評価を余儀なくされていたが、その後の著者らの研究[2)]で、この函数の簡単な表現が見つかり、精密な評価が可能になった。しかし、当時は特定の数値範囲で確認したにとどまり、数学的根拠は明かされていなかった。このことの証明は、前報の研究ノート[3)]に示したように、次のような形の2項係数を含む有限和に関する等式に帰着する。この研究ノートで、これらの証明を示す。合わせて、函数$F_l(x)$の性質をいくつか記す。

【命題1】

$1 \leq n \leq l-1$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{l}{k}\binom{n}{k}}{\binom{l+n-1}{2k}} = \frac{l+n}{l-n}$$

が成立する。

【命題2】

$n \geq 2$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\binom{n}{k}\binom{n}{k}}{\binom{2n-1}{2k}} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2n}{n+k}$$

が成立する。

受付日　2007.4.16
受理日　2007.6.13
所　属　福井県立大学学術教養センター

【命題１の証明】

通常、２項係数は$0\leq k\leq n$の整数の範囲で

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

によって定義されるが、ここでは、$n<k$の場合やnが負の場合も許し、形式的に右辺の意味で解釈することにする。ただし、kは0または正の整数とする。この定義の下では、n=0, 1, 2, ..., $k-1$のとき、 $\binom{n}{k}=0$ である。

$n=1$のとき命題１が成立することは容易に確かめられるから、以下では、$n\geq 2$の場合を考える。命題１の左辺のlを不定元xでおきかえて、xに関する有理式として扱う。

$$Q(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{x}{k}\binom{n}{k}}{\binom{x+n-1}{2k}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{(x+n-1)\cdots(x+n-2k)}\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}.$$

この有理式の極を調べる。$Q(x)$の分母には、見かけ上、最大で$2n$次の多項式が現れているが、約分をすると、

$$\begin{aligned}Q(x)=1&+\frac{x}{(x+n-1)(x+n-2)}\frac{2!}{1!}\binom{n}{1}+\frac{x(x-1)}{(x+n-1)\cdots(x+n-4)}\frac{4!}{2!}\binom{n}{2}\\&\cdots+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+4)}{(x+n-1)\cdots(x-n+6)}\frac{(2n-6)!}{(n-3)!}\binom{n}{n-3}+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+3)}{(x+n-1)\cdots(x-n+4)}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!}\binom{n}{n-2}\\&+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+2)}{(x+n-1)\cdots(x-n+2)}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\binom{n}{n-1}+\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{(x+n-1)\cdots(x-n)}\frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}=1&+\frac{(x+n-3)\cdots(x+1)x}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{2!}{1!}\binom{n}{1}+\frac{(x+n-5)\cdots(x-1)}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{4!}{2!}\binom{n}{2}\\&\cdots+\frac{(x-n+5)(x-n+4)}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{(2n-6)!}{(n-3)!}\binom{n}{n-3}+\frac{x-n+3}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{(2n-4)!}{(n-2)!}\binom{n}{n-2}\\&+\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\binom{n}{n-1}+\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{1}{x-n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}\end{aligned}$$

となって、結局、

$$Q(x)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(x+n-2k-1)\cdots(x-k+1)}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}+\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{1}{x-n}\cdot\frac{(2n)!}{n!}$$

の形になり、$Q(x)$の分母の次数は高々n次であることがわかる。したがって、$Q(x)$は次の形の部分分数に分解できる。

$$Q(x)=1+\sum_{m=1}^{n-1}\frac{a_m}{x+m}+\frac{b}{x-n},$$

$$a_m=(x+m)Q(x)|_{x=-m}, \qquad (m=1,2,3,\ldots,n-1),$$

$$b=(x-n)Q(x)|_{x=n}=\frac{1}{(2n-1)\cdots(n+1)}\cdot\frac{(2n)!}{n!}=2n,$$

このとき、$a_m=0$であることを示そう。

$(x+m)Q(x)$の項は、$m\geq n-2k$の場合に限り、分母に因子$x+m$をもつことに注意する。

$$(x+m)Q(x)=\sum_{k<(n-m)/2}\frac{(x+m)\times x(x-1)\cdots(x-k+1)}{(x+n-1)\cdots(x+n-2k)}\cdot\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}$$
$$+\sum_{k\geq(n-m)/2}\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{(x+n-1)\cdots(x+m+1)\times(x+m-1)\cdots(x+n-2k)}\cdot\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}$$

この式に$x=-m$を代入すると、$k<(n-m)/2$の項はすべて0になって、

$$\begin{aligned}(x+m)Q(x)|_{x=-m}&=\sum_{k\geq(n-m)/2}\frac{(-m)(-m-1)\cdots(-m-k+1)}{(-m+n-1)\cdots2\cdot1\times(-1)(-2)\cdots(-m+n-2k)}\cdot\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}\\&=\sum_{k\geq(n-m)/2}\frac{(-1)^k(m+k-1)\cdots(m+1)m}{(-1)^{m-n+2k}(n-m-1)!(m-n+2k)!}\cdot\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}\\&=\sum_{k\geq(n-m)/2}(-1)^{n-m-k}(n-m)\frac{(m+k-1)!}{(m-1)!k!}\cdot\frac{(2k)!}{(n-m)!(m-n+2k)!}\binom{n}{k}\\&=\sum_{k\geq(n-m)/2}(-1)^{n-m-k}(n-m)\binom{k+m-1}{m-1}\binom{2k}{n-m}\binom{n}{k}\end{aligned}$$

のように変形できる。$k<(n-m)/2$のとき、$\binom{2k}{n-m}=0$と定義したから、和の範囲を$0\leq k\leq n$に拡張してよい。こうして、a_mは

$$a_m=(-1)^{n-m}(n-m)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k+m-1}{m-1}\binom{2k}{n-m}\binom{n}{k}$$

の形に表される。

さて、一般に、$n \geq 1$ のとき、高々 $n-1$ 次の任意の多項式 $P(x)$ について、

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(k)\binom{n}{k}=0$$

が成り立つ。なぜなら、$(x+1)^n$ を繰り返し微分して、

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}x^k\binom{n}{k},\quad n(x+1)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}kx^{k-1}\binom{n}{k},\quad n(n-1)(x+1)^{n-2}=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)x^{k-2}\binom{n}{k},\ldots,$$

$$n(n-1)\cdots 3\cdot 2(x+1)=\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\cdots(k-n+2)x^{k-n+1}\binom{n}{k},$$

$x=-1$を代入すると、

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,\quad \sum_{k=0}^{n}k(-1)^k\binom{n}{k}=0,\quad \sum_{k=0}^{n}k(k-1)(-1)^k\binom{n}{k}=0,\ldots,$$

$$\sum_{k=0}^{n}k(k-1)\cdots(k-n+2)(-1)^k\binom{n}{k}=0,$$

一方、高々$n-1$次の任意の多項式$P(x)$は、基底

$$P_0(x)=1,\ P_1(x)=x,\ P_2(x)=x(x-1),\ P_3(x)=x(x-1)(x-2),\ \ldots,$$

$$P_{n-1}(x)=x(x-1)\cdots(x-n+2)$$

に関して、適当な係数$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$を定めて、線形結合

$$P(x)=\alpha_0 P_0(x)+\alpha_1 P_1(x)+\alpha_2 P_2(x)+\cdots+\alpha_{n-1}P_{n-1}(x)$$

の形に表すことができる。よって、

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(k)\binom{n}{k}=\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_j\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P_j(k)\binom{n}{k}=0$$

が成り立つ。

いま、$P(x)$として、

$$P(x)=\binom{x+m-1}{m-1}\binom{2x}{n-m}=\frac{(x+m-1)\cdots(x+1)}{(m-1)!}\cdot\frac{2x(2x-1)\cdots(2x-n+m+1)}{(n-m)!}$$

を適用すると、$P(x)$の次数は$n-1$次であるから、

$$a_m=(-1)^{n-m}(n-m)\sum_{k=0}^{n}(-1)^k P(k)\binom{n}{k}=0,\qquad (m=1,2,\ldots,n-1)$$

となる。したがって、有理式$Q(x)$は

$$Q(x)=1+\frac{2n}{x-n}=\frac{x+n}{x-n}$$

と表される。この等式は、はじめの$Q(x)$の定義において分母が0でない場合、すなわち、$x\neq -n+1,\ \ldots,\ n-1,\ n$の場合に成立するものである。　(証明終)

【命題２の証明】

次のような有理式$S(x)$を考える。

$$S(x)=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\binom{x}{k}\binom{n}{k}}{\binom{x+n-1}{2k}}.$$

命題１を用いると、$S(x)$は次のような形で表すことができる。

$$S(x)=Q(x)-1-\frac{\binom{x}{n}\binom{n}{n}}{\binom{x+n-1}{2n}}=\frac{2n}{x-n}-\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\cdot\frac{1}{x-n}$$

$$=\frac{1}{x-n}\left(2n-\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\right).$$

ここで、

$$f(x)=2n-\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}$$

とおくと、$f(n)=0$であることから、

$$S(n)=\lim_{x\to n}\frac{f(x)-f(n)}{x-n}=f'(n).$$

一方、$f(x)$を微分したものは、

$$f'(x)=\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{(x+n-1)\cdots(x+1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{x+k}$$

であるから、

$$S(n)=f'(n)=\frac{(2n)!}{n!}\cdot\frac{1}{(2n-1)\cdots(n+1)}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2n}{n+k}$$

を得る。$S(n)$は命題２の左辺にほかならない。　(証明終)

【応用例】

命題１，２を用いて、次のような式の変形が行える。

整数 $n\geq 0$ に対して、記号$(\zeta)_n$を、$(\zeta)_n=(\zeta+1)(\zeta+2)\cdots(\zeta+n-1)$，$(\zeta)_0=1$と定義する。このとき、$x>0$の領域で定義された、整数 $l\geq 2$ を含む函数[1)]

$$F_l(x)=\frac{l!}{x^l}\left\{e^x+x\sum_{n=0}^{l-2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n x^{m+n}}{(l+m-n-1)_{2n+2}m!n!}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(l)_l x^{m+l}}{(m)_{2l}m!}-\sum_{m=0}^{l-1}\frac{lx^m}{(l-m)m!}\right\}-l\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{1}{m}$$

は、次のように表される。

$$F_l(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(l+1)_{k-1}}=1+x+\frac{x^2}{2(l+1)}+\frac{x^3}{3(l+1)(l+2)}+\cdots.$$

【証　明】

$F_l(x)$は l 個の無限級数を含んでいる。まず、これらの収束を確かめる。級数の係数を$B_{m,n}$とかく。

$$B_{m,n}=\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n}{(l+m-n-1)_{2n+2}m!n!}.\qquad (n=0,1,\ldots,l-2,\quad m\geq 0)\ .$$

この式で、$n=l-1$とすると、

$$B_{m,l-1}=\frac{(1)_l(l+1)_{l-1}}{(m)_{2l}m!(l-1)!}=\frac{(l)_l}{(m)_{2l}m!}.\qquad (m\geq 1)\ .$$

これは残る一つの級数の係数と同一であるから、l 個の級数を同じ形で書くことができる。

$$\sum_{n=0}^{l-2}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,n}x^{m+n+1}+\sum_{m=1}^{\infty}B_{m,l-1}x^{m+l}=\sum_{n=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,n}x^{m+n+1}.$$

ただし、右辺の $B_{0,l-1}$ は、例外的に $B_{0,l-1}=0$ と決めておく。ダランベールの公式によって、$\Sigma B_{m,n}x^m$ の収束半径 ρ を求めると、

$$\rho=\lim_{m\to\infty}\left|\frac{B_{m-1,n}}{B_{m,n}}\right|=\lim_{m\to\infty}\frac{(l+m-n-1)_{2n+2}\,m!}{(l+m-n-2)_{2n+2}(m-1)!}=\lim_{m\to\infty}\frac{(l+m+n)m}{l+m-n-2}=\infty\,.$$

よって、$\Sigma\Sigma B_{m,n}x^{m+n+1}$ も $|x|<\infty$ で収束する。この収束は絶対収束であるから、和の順序をどのように変えても同一の値に収束する。

そこで、$F_l(x)$ の式で、e^x を冪級数に展開し、x^k の斉次の項で整理すると、

$$F_l(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{l!}{m!}x^{m-l}+l!\sum_{n=0}^{l-1}\sum_{m=0}^{\infty}B_{m,n}x^{m+n-l+1}-\sum_{m=0}^{l-1}\frac{l}{(l-m)}\frac{l!}{m!}x^{m-l}-\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{l}{m}$$

$$=\sum_{k=1-l}^{-1}\left\{\frac{l!}{k(l+k-1)!}+\sum_{n=0}^{l+k-1}A_{k,n}\right\}x^k+\left\{1-\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{l}{m}+\sum_{n=0}^{l-2}A_{0,n}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{l!}{(l+k)!}+\sum_{n=0}^{l-1}A_{k,n}\right\}x^k\,.$$

ここで、$\Sigma\Sigma B_{m,n}\,x^{m+n-l+1}$ の添字 m を $k=m+n-l+1$ に変更して、$A_{k,n}=\ l!B_{m,n}$ とおいた。
$\zeta\geq 1$ のとき、$(\zeta)_n=(\zeta+n-1)!/(\zeta-1)!$ であるから、$A_{k,n}$ は、

$$A_{k,n}=\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n\,l!}{(2l-2n+k-2)_{2n+2}(l-n+k-1)!\,n!}$$

$$=\frac{l!(2n+1)!(2l-2n+k-3)l!}{(l-n-1)!(n+1)!(2l+k-1)!(l-n+k-1)!\,n!}=\frac{l!}{2(l+k)!}\frac{\binom{l}{n+1}\binom{l+k}{n+1}}{\binom{2l+k-1}{2n+2}}$$

と表される。したがって、x^k の係数はそれぞれ次のようになる。

$1-l\leq k\leq -1$ のとき、命題１によって、

$$\frac{l!}{k(l+k-1)!}+\sum_{n=0}^{l+k-1}A_{k,n}=\frac{l!}{k(l+k-1)!}+\frac{l!}{2(l+k)!}\left(\frac{l+(l+k)}{l-(l+k)}-1\right)=0\,.$$

$k=0$ のとき、命題２によって、

$$1-\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{l}{m}+\sum_{n=0}^{l-2}A_{0,n}=1-\sum_{n=1}^{l-1}\frac{l}{l+n}+\frac{l!}{2l!}\sum_{n=1}^{l-1}\frac{2l}{l+n}=1\,.$$

$k\geq 1$ のとき、命題１によって、

$$\frac{l!}{(l+k)!}+\sum_{n=0}^{l-1}A_{k,n}=\frac{l!}{(l+k)!}+\frac{l!}{2(l+k)!}\left(\frac{(l+k)+l}{(l+k)-l}-1\right)=\frac{l!}{k(l+k-1)!}\,.$$

となる。よって、

$$F_l(x)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{l!}{k(l+k-1)!}x^k=1+x+\frac{x^2}{2(l+1)}+\frac{x^3}{3(l+1)(l+2)}+\cdots. \qquad (|x|<\infty)$$

（証明終）

【$F_n(x)$の性質】

以下に、$F_n(x)$の性質を列挙する。ここで、$\gamma\,(n,x)$は不完全ガンマ函数 $\gamma(n,x)=\int_0^x e^{-t}t^{n-1}dt$ を表す。($n>0$)

積分表示　$$F_n(x)=1+\int_0^x nt^{-n}e^t\gamma(n,t)dt \tag{1}$$

$$F_n(x)=1+\int_0^1\frac{e^{(1-s)x}-1}{1-s}ns^{n-1}ds \tag{2}$$

$$\gamma(n,x)=\mid e^{-t}t^{n-1}dt$$

漸化式　$$F_n(x)-1=x^{-n}e^x\gamma(n+1,x)+\frac{n}{n+1}(F_{n+1}(x)-1) \tag{3}$$

極　限　$$\lim_{n\to\infty}F_n(x)=1+x \tag{4}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^ne^{-x}(F_n(x)-1)=\Gamma(n+1) \tag{5}$$

級数展開　$$F_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2(n+1)}+\frac{x^3}{3(n+1)(n+2)}+\cdots \quad (定義) \qquad (|x|<\infty) \tag{6}$$

$$e^{-x}(F_n(x)-1)=x-\left(1+\frac{n}{n+1}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(1+\frac{n}{n+1}+\frac{n}{n+2}\right)\frac{x^3}{3!}-\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{7}$$

$$x^ne^{-x}(F_n(x)-1)=\gamma(n+1,x)+\frac{nx^{-1}}{n+1}\gamma(n+2,x)+\frac{nx^{-2}}{n+2}\gamma(n+3,x)+\cdots \qquad (|x|<\infty) \tag{8}$$

漸近展開　$$x^ne^{-x}F_n(x)=\Gamma(n+1)+n\Gamma(n+1)x^{-1}+\cdots+n\Gamma(n+k)x^{-k}+O(x^{-k-1}) \qquad (x\to+\infty) \tag{9}$$

$$\log F_n(x)=x-n\log x+\log n!+nx^{-1}+O(x^{-2}) \qquad (x\to+\infty) \tag{10}$$

【証　明】

これらの関係は、不完全ガンマ函数の次のような性質に由来する。

（G１）　$\gamma(n,x)=\int_0^x e^{-t}t^{n-1}dt$　（定義）

（G２）　$\Gamma(n)=\lim_{x\to\infty}\gamma(n,x)$　（定義）

（G３）　$\gamma(n+1,x)=n\gamma(n,x)-x^n e^{-x}$

（G４）　$e^x\gamma(n,x)=\dfrac{x^n}{n}+\dfrac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\dfrac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}+\cdots$　$(|x|<\infty)$

（G５）　$\int_0^x ne^x\gamma(n,x)dx=e^x\gamma(n+1,x)$

式（１）～(10)は、次のようにして導かれる。

【式（１）】　（G４）の級数に nx^{-n} を掛けて項別に積分することで得られる。

$$\int_0^x nx^{-n}e^x\gamma(n,x)dx=\int_0^x nx^{-n}\left(\frac{x^n}{n}+\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}+\frac{x^{n+2}}{n(n+1)(n+2)}+\cdots\right)dx$$

$$=x+\frac{x^2}{2(n+1)}+\frac{x^3}{3(n+1)(n+2)}+\cdots.$$

【式（２）】　式（１）に（G１）を代入し、次のように積分することで得られる。

$$F_n(x)-1=\int_0^x nt^{-n}e^t\gamma(n,t)dt=\int_0^x nt^{-n}e^t\int_0^t u^{n-1}e^{-u}dudt=\int_0^x nt^{-n}e^t\int_0^1(st)^{n-1}e^{-st}tdsdt$$

$$=\int_0^1 ns^{n-1}\int_0^x e^{(1-s)t}dtds=\int_0^1 ns^{n-1}\frac{e^{(1-s)x}-1}{1-s}ds.$$

【式（３）】　（G５）の関係を使って、式（１）に部分積分を行うことで得られる。

$$F_n(x)-1=\int_0^x nt^{-n}e^t\gamma(n,t)dt=x^{-n}e^x\gamma(n+1,x)+\int_0^x nt^{-n-1}e^x\gamma(n+1,t)dt$$

$$=x^{-n}e^x\gamma(n+1,x)+\frac{n}{n+1}(F_{n+1}(x)-1).$$

【式(４)】　任意のε>0に対して、$n \geq |x|(1+|x|/\varepsilon)$なる全ての$n$について、

$$|F_n(x)-1-x| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{|x|^k}{k(n+1)\cdots(n+k-1)} \leq \frac{|x|^2}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{x}{n} \right|^k = \frac{|x|^2}{n-|x|} \leq \varepsilon$$

である。よって、 $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1+x$.

【式(５)】　$x>0$とする。式(３)を用いて$F_n(x)$の上限を評価すると、

$$F_n(x)-1-x^{-n}e^x\gamma(n+1,x) = \frac{n}{n+1}(F_{n+1}(x)-1)$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(x^{-n-1}e^x\gamma(n+2,x) + (n+1)\int_0^x x^{-n-2}e^x\gamma(n+2,x)dx \right)$$

$$\leq \frac{n}{n+1}\left(x^{-n-1}e^x\gamma(n+2,x) + (n+1)x\cdot x^{-n-2}e^x\gamma(n+2,x) \right) = \frac{n(n+2)}{n+1} x^{-n-1}e^x\gamma(n+2,x)$$

である。一方、 $F_n(x)-1-x^{-n}e^x\gamma(n+1,x) \geq 0$ であるから、この２つの不等式を合わせて、

$$0 \leq x^n e^{-x}(F_n(x)-1) - \gamma(n+1,x) \leq \frac{n(n+2)}{n+1} x^{-1}\gamma(n+2,x)$$

を得る。この式の右辺は$x\to+\infty$の極限で0に収束するから、

$$\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x}(F_n(x)-1) = \lim_{x\to\infty} \gamma(n+1,x) = \Gamma(n+1) .$$

【式(７)】式(２)を冪級数に展開し、区間(0, 1)で一様収束することに注意して項別積分すると、

$$e^{-x}(F_n(x)-1) = \int_0^1 \frac{e^{-sx}-e^{-x}}{1-s} ns^{n-1}ds = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-sx)^k-(-x)^k}{(1-s)k!} ns^{n-1}ds$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}nx^k}{k!} \int_0^1 \frac{(1-s^k)s^{n-1}}{1-s} ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}nx^k}{k!} \int_0^1 \sum_{m=0}^{k-1} s^{m+n-1}ds = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1}nx^k}{k!(m+n)} .$$

【式(8)】　式(３)を繰り返し用いて、

$$x^n e^{-x}(F_n(x)-1)=\gamma(n+1,x)+\frac{n}{n+1}x^{-1}\gamma(n+2,x)+\cdots+\frac{n}{n+k}x^{-k}\gamma(n+k+1,x)$$

$$+\frac{n}{n+k+1}x^n e^{-x}(F_{n+k+1}(x)-1)\,.$$

この式で、xを固定し、$k\to\infty$の極限をとると、式(４)によって最後の項は0に収束して、式(８)の形の級数を得る。

【式(９), (10)】　上の式で、kを固定し、$x\to+\infty$としたときの極限で

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{n}{n+m}x^{-m}(\gamma(n+m+1,x)-\Gamma(n+m+1))+\frac{n}{n+k+1}x^n e^{-x}(F_{n+k+1}(x)-1)=O(x^{-k-1})$$

なることを確かめる。実際、ド・ロピタルの定理を用いてΣの中の項をx^{-k-1}と比較すると、

$$\lim_{x\to\infty}x^{k+1}x^{-m}(\gamma(n+m+1,x)-\Gamma(n+m+1))=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+m}e^{-x}}{(m-k-1)x^{m-k-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^{n+k+2}e^{-x}}{m-k-1}=0\,,$$

すなわち、x^{-k-1}に比べて高位の無限小であり、また、最後の項は、式(５)から、

$$x^n e^{-x}(F_{n+k+1}(x)-1)=O(x^{-k-1})$$

となる。よって、式(9)が成り立つ。さらに、式(９)の両辺の対数をとると、式(10)を得る。

(証明終)

参考文献：

1) 伊原千秋・五十嵐顕人、「低炭素鋼の高サイクル疲労におけるき裂発生モデル」、材料、29(320), 1980, pp. 434－438.　なお、付録１(438ページ) に記載の$F_1(x)$の表式には誤記があり、最後の項の符号は＋ではなく、－が正しい。

2) C. Ihara and T. Tanaka, “A stochastic damage accumulation model for crack initiation in high－cycle fatigue”, *Fatigue Fract Engng Mater Struct* 23, 2000, pp. 375－380.

3) 田中武之、「２項係数を含む有限和に関する命題(１)」、福井県立大学論集、28, 2006, pp. 123－129.