Fukui Prefectural University

福井県立大学論集　第28号　2006. 7

[研究ノート]

2項係数を含む有限和に関する命題（1）

Propositions on finite summation with binomial coefficients (1)

田　中　武　之*
TANAKA Takeyuki

【序　文】

金属材料の寿命を表す損傷累積モデルにおいて、ある種の確率分布函数が提案されている[1)]。著者らが過去に発表した論文において、この分布函数の簡単な表現が見つかり、それを用いて損傷累積モデルの改良を行った[2)]。しかし、当時は、基礎的な部分の証明が示されないままであった。ここに、その部分的証明を記す。（2006年４月15日）

はじめに、２つの命題を提示する。

【命題１】

$1 \leq n \leq l-1$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{l}{k}\binom{n}{k}}{\binom{l+n-1}{2k}} = \frac{l+n}{l-n}$$

が成立する。

【命題２】

$l \geq 2$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{l-1} \frac{\binom{l}{k}\binom{l}{k}}{\binom{2l-1}{2k}} = \sum_{k=1}^{l-1} \frac{2l}{l+k}$$

が成立する。

この2つの命題を用いて、次のような式の変形が行える。

受付日　2006.4.14
受理日　2006.5.31
＊所　属　福井県立大学　情報センター

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

【応用例】

整数 $n \geq 0$ に対して、記号 $(\zeta)_n$ を、$(\zeta)_n = \zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\cdots(\zeta+n-1)$, $(\zeta)_0 = 1$ と定義する。このとき、$x>0$ の領域で定義された、整数 $l \geq 2$ を含む函数[1)]

$$F_l(x) = \frac{l!}{x^l}\left\{e^x + x\sum_{n=0}^{l-2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n x^{m+n}}{(l+m-n-1)_{2n+2}m!n!} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(l)_l x^{m+l}}{(m)_{2l}m!} - \sum_{m=0}^{l-1}\frac{lx^m}{(l-m)m!}\right\} - l\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{1}{m}$$

は、次のように表される。

$$F_l(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k(l+1)_{k-1}} = 1 + x + \frac{x^2}{2(l+1)} + \frac{x^3}{3(l+1)(l+2)} + \cdots$$

$$= {}_1F_1(0\,;l\,;x) \times l - l + 1$$

ここで、${}_1F_1(0\,;l\,;x)$ は、母数（1,1）の一般化超幾何函数を表す。

証明に先立ち、$F_l(x)$ の数値誤差について述べる。$F_l(x)$ を損傷累積モデル[1)]に適用するとき、l が10～10^{12}程度の、かなり広い範囲にわたって値を知る必要がある。前者の表現では、丸め誤差および桁落ちによる精度の悪化を無視し得ないこと、また、二重級数の項が収束するまでに多大な計算時間が費やされることが問題であった。そこで、$F_l(x)$ の挙動を数値的に観察したところ、l が小さいとき、$F_l(x) \fallingdotseq e^x$ と近似され、また、l が無限大に近づくとき、$F_l(x) \fallingdotseq 1+x$ に近づくという傾向が見られた。ある予想のもとに、式の変形を試みたところ、後者のような$F_l(x)$ の表現が見出された。同時に、$F_l(x)$ の収束速度は、l がいかなる値であっても、高々 e^x のべき級数の収束速度以下であり、また、数値誤差は e^x のべき級数の尾部の程度であることが明らかになった。その結果、損傷累積モデルの適用が以前より容易になった。

【証　明】

はじめに、$F_l(x)$ の収束半径を考えると、式中のいずれの無限級数の係数も、$1/m!$ の程度で押さえられることから、委細を述べるまでもなく、$x>0$ の領域で、それぞれの無限級数は絶対収束している（付記３）。したがって、任意に和の順序を変えても無限級数の値は不変である。

そこで、e^x をべき級数に展開し、$F_l(x)$ を x の斉次の項で整理する。

$$F_l(x) = l!\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m-l}}{m!} + l!\sum_{n=0}^{l-2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n x^{m+n-l+1}}{(l+m-n-1)_{2n+2}m!n!} + l!\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(l)_l x^m}{(m)_{2l}m!}$$
$$- l!\sum_{m=0}^{l-1}\frac{lx^{m-l}}{(l-m)m!} - l\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{1}{m}$$

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

$$=\sum_{k=1-l}^{-1}\left\{\frac{l!}{k(l+k-1)!}+\sum_{n=0}^{k+l-1}A_{k,n}\right\}x^k+\left\{1-\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{l}{m}+\sum_{n=0}^{l-2}A_{0,n}\right\}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{l!}{(l+k)!}+\sum_{n=0}^{l-1}A_{k,n}\right\}x^k$$

ここで、

$$A_{k,n}=\frac{(l-n)_{n+1}(n+2)_n l!}{(2l-2n+k-2)_{2n+2}(l-n+k-1)!n!}$$

とおいた。 $(\zeta)_n=(\zeta+n-1)!/(\zeta-1)!$ であることを用いると、$A_{k,n}$ は、

$$A_{k,n}=\frac{l!(2n+1)!(2l-2n+k-3)!l!}{(l-n-1)!(n+1)!(2l+k-1)!(l-n+k-1)!n!}$$

と表される。したがって、x^k の各係数について、

$1-l\leq k\leq -1$のとき、

$$\frac{l!}{k(l+k-1)!}+\sum_{n=0}^{k+l-1}A_{k,n}=0 \qquad (1)$$

$k=0$ のとき、

$$\sum_{n=0}^{l-2}A_{0,n}=\sum_{m=l+1}^{2l-1}\frac{l}{m} \qquad (2)$$

$k\geq 1$のとき、

$$\frac{l!}{(l+k)!}+\sum_{n=0}^{l-1}A_{k,n}=\frac{1}{k(l+1)_{k-1}} \qquad (3)$$

が成り立つことを示せばよい。

（１）が成り立つことは、命題１によって、示される。

$$\frac{(l+k-1)!}{l!}\sum_{n=0}^{l+k-1}A_{k,n}=\sum_{n=0}^{k+l-1}\frac{l!}{(l-n-1)!(n+1)!}\frac{(2n+1)!(2l-2n+k-3)!}{(2l+k-1)!}\frac{(l+k-1)!}{(l-n+k-1)!n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{k+l-1}\frac{l!}{(l-n-1)!(n+1)!}\frac{(2n+2)!(2l-2n+k-3)!}{(2l+k-1)!}\frac{(l+k)!}{(l-n+k-1)!(n+1)!}\frac{1}{2(l+k)}$$

$$=\frac{1}{2(l+k)}\sum_{n=0}^{l+k-1}\frac{\binom{l}{n+1}\binom{l+k}{n+1}}{\binom{2l+k-1}{2n+2}}=\frac{1}{2(l+k)}\left(\frac{2l+k}{-k}-1\right)=-\frac{1}{k}$$

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

（２）が成り立つことは、命題２によって、示される。

$$\sum_{n=0}^{l-2} A_{0,n} = \sum_{n=1}^{l-1} \frac{(l-n+1)_n (n+1)_{n-1}}{(2l-2n)_{2n}(l-n)!(n-1)!} = \sum_{n=1}^{l-1} \frac{(l-n+1)_n (n+1)_{n-1}}{(2l-2n)_{2n}(l-n)!(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=1}^{l-1} \frac{n}{2n}\left(\frac{l!}{(l-n)!n!}\right)^2 \frac{(2n)!(2l-2n-1)!}{(2l-1)!} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{l-1} \frac{\binom{l}{n}\binom{l}{n}}{\binom{2l-1}{2n}} = \sum_{n=1}^{l-1} \frac{l}{l+n}$$

（３）が成り立つことは、命題１によって、示される。

$$\frac{(l+k)!}{l!}\sum_{n=0}^{l-1} A_{k,n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{l-1} \frac{l!}{(l-n-1)!(n+1)!} \frac{(2n+2)!(2l-2n+k-3)!}{(2l+k-1)!} \frac{(l+k)!}{(l+k-n-1)!(n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{l-1} \frac{\binom{l}{n+1}\binom{l+k}{n+1}}{\binom{2l+k-1}{2n+2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{l+k+l}{l+k-l} - 1\right) = \frac{l}{k}$$

（証明終）

【命題１に関する覚書】

命題１および命題２の成立は、ある程度、数値的には確認しているが、それらに言及した文献は、未だ見つかっていない。研究の途中経過として、以下に、命題１の別の表現を記す。

$l=x$ とかきなおし、命題１の等式の左辺を $a_n(x)$とおくと、ボッホハンマー記号

$(\zeta)_n = \zeta(\zeta+1)(\zeta+2)\cdots(\zeta+n-1),\quad (\zeta)_0 = 1$ を用いて、

$$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{x}{k}\binom{n}{k}}{\binom{x+n-1}{2k}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-k+1)_k}{(x+n-2k)_{2k}} \frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}$$

と表される。$a_n(x)$は、x の有理函数として表され、その分母の次数は、高々 n 次である。実際、nが偶数のとき、

$$a_n(x) = 1 + \frac{x}{(x+n-2)_2}\frac{2!}{1!}\binom{n}{1} + \frac{(x-1)_2}{(x+n-4)_4}\frac{4!}{2!}\binom{n}{2} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{(x-n/2+2)_{n/2-1}}{(x+2)_{n-2}}\frac{(n-2)!}{(n/2-1)!}\binom{n}{n/2-1} + \frac{(x-n/2+1)_{n/2-1}}{(x+1)_{n-1}}\frac{n!}{(n/2)!}\binom{n}{n/2}$$

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

$$+\frac{(x-n/2)_{n/2-2}}{(x+1)_{n-1}}\frac{(n+2)!}{(n/2+1)!}\binom{n}{n/2+1}+\cdots+\frac{(x-n+4)_2}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-6)!}{(n-3)!}\binom{n}{n-3}$$

$$+\frac{(x-n+3)}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!}\binom{n}{n-2}+\frac{1}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\binom{n}{n-1}+\frac{1}{(x+1)_{n-1}\cdot(x-n)}\frac{(2n)!}{n!}$$

nが奇数のとき、

$$a_n(x)=1+\frac{x}{(x+n-2)_2}\frac{2!}{1!}\binom{n}{1}+\frac{(x-1)_2}{(x+n-4)_4}\frac{4!}{2!}\binom{n}{2}+\cdots$$

$$\cdots+\frac{(x-(n-1)/2+1)_{(n-1)/2}}{(x+1)_{n-1}}\frac{(n-1)!}{((n-1)/2)!}\binom{n}{(n-1)/2}$$

$$+\frac{(x-(n-1)/2+1)_{(n-1)/2-2}}{(x+1)_{n-1}}\frac{(n-1)!}{((n-1)/2)!}\binom{n}{(n-1)/2}+$$

$$\cdots+\frac{(x-n+4)_2}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-6)!}{(n-3)!}\binom{n}{n-3}+\frac{(x-n+3)}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-4)!}{(n-2)!}\binom{n}{n-2}$$

$$+\frac{1}{(x+1)_{n-1}}\frac{(2n-2)!}{(n-1)!}\binom{n}{n-1}+\frac{1}{(x+1)_{n-1}\cdot(x-n)}\frac{(2n)!}{n!}$$

と表される。したがって、$f_n(x)=a_n(x)\cdot(x-n)\cdot(x+1)_{n-1}$ とおくと、$f_n(x)$ は n 次の整式となる。

$$f_n(x)=(x-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}(x-k+1)_{n-k-1}+\frac{(2n)!}{n!}$$

このとき、n 次方程式 $f_n(x)=0$ の根が、 x= －1, －2, －3, ..., －n、すなわち、

$$f_n(x)=(x-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}(x-k+1)_{n-k-1}+\frac{(2n)!}{n!}=(x+1)_n$$

が、成立すれば、命題１は達せられる。

$f_n(x)$に、$x=-m$ を代入すると、(m= 1, 2, 3, ..., n)

$$f_n(-m)=\frac{(2n)!}{n!}+(-m-n)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(2k)!}{k!}\binom{n}{k}(-m-k+1)_{n-k-1}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!}+(-m-n)\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\binom{n}{n-k}(-m-n+k+1)_{k-1}$$

$$=\frac{(2n)!}{n!}+(-m-n)\sum_{k=1}^{n}\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\binom{n}{k}(-m-n+k+1)\cdots\uparrow\cdots(-m-n+2k-1)$$

$$=\frac{(2n)!}{n!}+(m+n)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\binom{n}{k}(m+n-k-1)\cdots\downarrow\cdots(m+n-2k+1)$$

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

$$=\frac{(2n)!}{n!}+(m+n)\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!}\binom{n}{k}(m+n-2k+1)_{k-1}$$

となる。ここで、和の各項に注目すると、$-m-n+k+1\le 0\le -n-m+2k-1$ となるような項は、すべて 0 になる。すなわち、k が、$(m+n+1)/2\le k\le m+n-1$ の範囲にある項はすべて 0 である。したがって、和は $1\le k\le[(m+n)/2]$ の範囲で考えればよい。ここで、記号 $[a]$ は、ガウス記号であり、a の整数部分を表す。$f_n(-m)$ を次のように変形すると、

$$\frac{1}{(n-m)!(m-1)!}f_n(-m)=(m+n)\sum_{k=0}^{[(m+n)/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-m)!}\binom{n}{k}\frac{(n+m-k-1)!}{(n+m-2k)!(m-1)!}$$

$$=(m+n)\sum_{k=0}^{[(n+m)/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-m}\binom{n+m-k-1}{m-1}$$

となる。よって、命題１の成立は、任意の m（$1\le m\le n$）について、

$$\sum_{k=0}^{[(n+m)/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-m}\binom{n+m-k-1}{m-1}=0$$

が成立することに、帰着する。

特に、$m=1$ のとき、

$$\frac{1}{(n-1)!}f_n(-1)=(n+1)\binom{2n}{n-1}+(n+1)\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-1)!}\binom{n}{k}(n-2k+2)_{k-1}$$

$$=(n+1)\binom{2n}{n-1}+(n+1)\sum_{k=1}^{[(n+1)/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{(n-k)!(n-1)!}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{(n-2k+1)!}$$

$$=(n+1)\sum_{k=0}^{[(n+1)/2]}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{2n-2k}{n-1}=0$$

が成立する。最後の等式は、文献３)の 4.2.5 節の公式 70 による。

参考文献

1）伊原千秋・五十嵐顕人、「低炭素鋼の高サイクル疲労におけるき裂発生モデル」、材料、**29**(320), 1980, pp.434-438.

2）C. Ihara and T. Tanaka, "A stochastic damage accumulation model for crack initiation in high-cycle fatigue", *Fatigue Fract Engng Mater Struct* **23**, 2000, pp.375-380.

3）А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, и О. И. Маричев, "Интегралы и ряды злементарные функции", Наука, Москва, 1981.

NII-Electronic Library Service

Fukui Prefectural University

付　記

（1） 文献1の付録1（438ページ）に記載の$F_l(x)$の表式には誤記があり、最後の項の符号は＋ではなく、－が正しい。

（2） 文献3）の 4.2.5 節の第 70 番目の公式は、次の形である。

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\binom{m-2k}{n-1}=0 \qquad (m\geq 2n)$$

（3） $F_l(x)$ の絶対収束半径に関しては、より詳細な証明が必要であるが、本研究の目的に限っていえば、$0<x<1$の範囲に限定すれば十分である。少なくとも、この範囲内では$F_l(x)$が絶対収束することは明らかなので、これを複素平面上の正則函数として解析接続すれば、一意的にこの函数が表現される。さらに、$F_l(x)$は実軸上に特異点を持たないこともわかる。

NII-Electronic Library Service